

## COMPITO DI ARITMETICA

11 settembre 2014

Cognome e nome: .....

Numero di matricola: .....

### Esercizio 1.

Consideriamo un dado a 6 facce, in cui le facce siano numerate da 1 a 6, ed associamo ad un lancio del dado il punteggio corrispondente al valore della faccia. Calcolare la probabilità che, dopo  $n$  lanci dello stesso dado, la somma dei punteggi ottenuti sia un multiplo di 7.

### Esercizio 2.

Determinare, al variare del parametro intero  $a$ , il numero di soluzioni modulo 90 del seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} 3x \equiv a + 1 \pmod{9} \\ (x - 1)(x - a) \equiv 0 \pmod{15}. \end{cases}$$

### Esercizio 3.

Sia  $G$  un gruppo e sia  $\Delta = \{(x, x) \mid x \in G\}$ .

- Dimostrare che  $\Delta$  è un sottogruppo di  $G \times G$ .
- Dimostrare che  $\Delta$  è un sottogruppo normale di  $G \times G$  se e solo se  $G$  è abeliano.
- Dimostrare che, se  $G$  è abeliano,  $(G \times G)/\Delta$  è isomorfo a  $G$ .

### Esercizio 4.

Sia  $f(x) = (x^{15} - 1)(x^{12} - 1)$ .

- Determinare il grado del campo di spezzamento di  $f(x)$  su  $\mathbb{F}_2$  e su  $\mathbb{F}_7$ .
- Determinare quali sono i possibili valori del grado del campo di spezzamento di  $f(x)$  su  $\mathbb{F}_p$  al variare di  $p$  fra i numeri primi.